Questão proposta por: Cleuber Eduardo do Nascimento Silva	
Instituto: IFF - Campus Campos Centro	

QUESTÃO 04

O professor Renato, durante a preparação da sua turma para a prova da OMIF2020, propôs um desafio a seus alunos, cujo enunciado segue logo abaixo. Tente resolvê-lo você também.

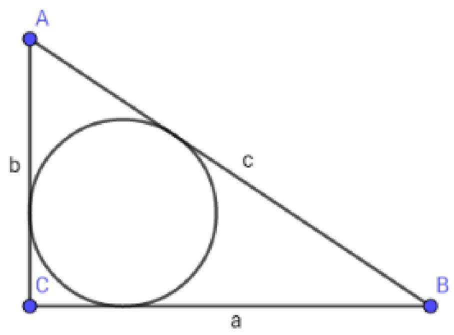
Sendo h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer e r o raio da circunferência inscrita a este triângulo:

a) Prove que $\frac{r}{h} < 0{,}5$.

b) Prove que $\frac{r}{h} > 0{,}4$.

Solução: Considere a figura abaixo:

a)



Seja S a área do triangulo ABC temos que:

$$S = \frac{ch}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r$$

Logo:

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Sabendo que, pela condição de existência do triângulo, temos que

$c < a+b$ e assim:

$$\frac{r}{h} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$$

b) Por outro lado, por Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

e sabendo que: $MA \geq MG$

temos:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Então:

$$c^2 \geq 2ab$$

Assim podemos escrever:

$$2c^2 \geq (a+b)^2$$

Portanto:

$$a+b \leq \sqrt{2}c$$

Assim:

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{c\sqrt{2}+c} = \sqrt{2}-1$$

Portanto, r/h > 0,4.